Formelsamling
for matematik niveau B og A
på højere handelseksamen

Appendiks

April 2002

Matematik B

Procentregning

Procentvis vækst

Værdien af en given variabel x bliver ændret fra x_0 til x_1.
Den %-vise vækst beregnes ved:

$$\frac{(\text{slutværdi} - \text{startværdi})}{\text{startværdi}} \cdot 100\% \quad = \quad \frac{(x_1 - x_0)}{x_0} \cdot 100\% \tag{A1}$$

Rentesregning

Gennemsnitlig rente

Den gennemsnitlige rentefod pr. termin r beregnes udfra terminsrenterne $r_1, r_2, \ldots, r_n$

$$r = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot \ldots \cdot(1+r_n)} - 1 \tag{A2}$$

Annuitetsregning

Restgældsformlen

Restgælden, R_t, efter t terminer for et lån med hovedstol A_0, rentefod r pr. termin, annuitetsydelse y og samlet løbetid n terminer ($n \geq t$):

$$R_t = K_t - A_t = A_0 \cdot (1+r)^t - y \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r} \tag{A3}$$

Retvinklet trekant

Areal

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinie} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \qquad \text{(A4)}$$

Vilkårlig trekant

Sinusrelationerne

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c} \qquad \text{(A5)}$$

Funktioner

Monotoniforhold

Funktionen f er voksende i intervallet $K \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ for alle $x_2 > x_1$ i K

Funktionen f er aftagende i intervallet $K \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ for alle $x_2 > x_1$ i K

Ekstrema

Funktionen f har lokalt maksimum i $x_0 \in \,]\, a; b \,[\; \Leftrightarrow f(x_0) > f(x)$ for alle $x \in \,]\, a; x_0 \,[\, \cup \,]\, x_0; b \,[$

Funktionen f har lokalt minimum i $x_0 \in \,]\, a; b \,[\; \Leftrightarrow f(x_0) < f(x)$ for alle $x \in \,]\, a; x_0 \,[\, \cup \,]\, x_0; b \,[$

Funktionen f har globalt maksimum i $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x)$ for alle $x \in \text{Dm}(f)$

Funktionen f har globalt minimum i $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x)$ for alle $x \in \text{Dm}(f)$

Polynomium af grad *n*

Division med (x - t)

t er nulpunkt for f $\Leftrightarrow$ $(x - t)$ går op i $f(x)$ $\Leftrightarrow$ divisionen $f(x) : (x - t)$ giver restpolynomiet 0 (A6)

Eksponentielle funktioner

Fordoblingskonstant T_2

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\log(2)}{\log(a)} \tag{A7}$$

Halveringskonstant $T_{½}$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)} \tag{A8}$$

Eksponentiel ligning

$$ba^x = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\ln(\frac{y}{b})}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(y) - \ln(b)}{\ln(a)} \\ \\ x = \dfrac{\log(\frac{y}{b})}{\log(a)} = \dfrac{\log(y) - \log(b)}{\log(a)} \end{cases} \tag{A9}$$

Potensfunktioner

Eksponent *a*

Grafen for funktionen $f(x) = y = bx^a$ går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2):

$$a = \begin{cases} \dfrac{\ln(\frac{y_2}{y_1})}{\ln(\frac{x_2}{x_1})} = \dfrac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} \\ \\ \dfrac{\log(\frac{y_2}{y_1})}{\log(\frac{x_2}{x_1})} = \dfrac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} \end{cases} \qquad \text{(A10)}$$

Differentialregning

Monotoniforhold

Funktionen f er kontinuert i $[a; b]$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \text{ for alle } x \in \,]a; b[\; &\Leftrightarrow f \text{ er voksende i } [a; b] \\ f'(x) < 0 \text{ for alle } x \in \,]a; b[\; &\Leftrightarrow f \text{ er aftagende i } [a; b] \end{aligned} \qquad \text{(A11)}$$

Ekstrema

$$f'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ har lokalt maksimum i } x_0 \\ f \text{ har lokalt minimum i } x_0 \\ f \text{ har vandret vendetangent i } x_0 \end{cases} \qquad \text{(A12)}$$

Vendetangenter

Funktionen f har vendetangent i punktet $(x_0, f(x_0)) \Rightarrow f''(x_0) = 0$ (A13)

Matematik A

Vektorer i planen

Parallelle vektorer

$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\vec{a}} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = 0$ (A14)

Linier i planen

Ortogonale linier

Linierne l: $y = ax + b$ og m: $y = cx + d$ er ortogonale $\Leftrightarrow$ $a \cdot c = -1$ (A15)

Afstand fra punkt til linie

Afstanden fra punktet $P(x_0, y_0)$ til linien l med ligningen $y = ax + b$ er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} \qquad \text{(A16)}$$

Ellipser

Toppunkter

For ellipser med centrum i $C(x_0, y_0)$, vandret halvakse a og lodret halvakse b findes toppunkterne i $(x_0 \pm a, y_0)$ og $(x_0, y_0 \pm b)$. (A17)

Hyperbler

Ligning

Hyperblen med venstre henholdsvis højre gren, centrum i $C(x_0, y_0)$, vandret halvakse a og lodret halvakse b har ligningen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(A18)}$$

For denne hyperbel er toppunkterne $T(x_0 \pm a, y_0)$ (A19)

Hyperblen med øvre henholdsvis nedre gren, centrum i $C(x_0, y_0)$, vandret halvakse a og lodret halvakse b har ligningen

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(A20)}$$

For denne hyperbel er toppunkterne $T(x_0, y_0 \pm b)$ (A21)

Funktioner i to variable

Forskrift

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e \qquad \text{(A22)}$$

Niveaukurver $N(t)$:

$$N(t):\quad ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = t \qquad \text{(A23)}$$

For $a = c = 0$ vil $N(t)$ beskrive en ret linie, et punkt eller den tomme mængde.

For $c = 0,\ a \neq 0$ vil $N(t)$ beskrive en parabel, et punkt eller den tomme mængde.

For $a = c,\ a \cdot c > 0$ vil $N(t)$ beskrive en cirkel, et punkt eller den tomme mængde.

For $a \neq c,\ a \cdot c > 0$ vil $N(t)$ beskrive en ellipse, et punkt eller den tomme mængde.

For $a \neq c,\ a \cdot c < 0$ vil $N(t)$ beskrive en hyperbel, et punkt eller den tomme mængde

Kontinuert stokastisk variabel

Tæthedsfunktion *f*

Tæthedsfunktionen $f(x)$ for den kontinuerte stokastiske variabel X med værdier i intervallet $[a; b]$ opfylder

(1) $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a; b]$ (A24)

(2) $\int_a^b f(x) \cdot dx = 1$ (A25)

Fordelingsfunktion *F*

X er en kontinuert stokastisk variabel med værdier i $[a; b]$ og tæthedsfunktion $f(x)$

$F(x) = P(X \leq x) = P(X < x)$ (A26)

$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$ (A27)

Middelværdi

$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$ (A28)

Varians

$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \int_a^b (x - \mathrm{E}(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx$ (A29)

Standardafvigelse

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ (A30)

Summer/differenser af stokastiske variable.

Har X: stokastisk variabel med middelværdi $E(X)$ og varians $Var(X)$
Y: stokastisk variabel med middelværdi $E(Y)$ og varians $Var(Y)$

Danner $Z = X \pm Y$

Regneregler

$E(Z) = E(X) \pm E(Y)$ (A31)

$Var(Z) = Var(X) + Var(Y)$ (A32)

$\sigma_Z = \sqrt{Var(Z)}$ (A33)

Approksimation af binomialfordelt stokastisk variabel *X* med normalfordeling

$X \sim b(n, p)$
Forudsætter $n \cdot p \geq 5$ og $n \cdot (1 - p) \geq 5$ (A34)

Tilnærmelsesvis fordeling af *X*

$X \approx N(\mu = n \cdot p, \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}\ )$ (A35)

Sandsynligheder

$X \sim b(n, p)$ og x heltallig

$P(X \leq x) = P(X < x + 0{,}5)$ (A36)

$P(X \geq x) = 1 - P(X < x - 0{,}5)$ (A37)

$P(X = x) = P(x - 0{,}5 < X < x + 0{,}5)$ (A38)